

# Теорија чворова

Vladislava Stanković

Природно-математички факултет, Вишеградска 33, 18000 Ниш

[vanja.dunja91@gmail.com](mailto:vanja.dunja91@gmail.com)

## 1. ISTORIJA TEORIJE ČVOROVA

Čvorovi su prisutni u različitim područjima ljudskih aktivnosti, nauke i umetnosti od doba praistorije do danas. Njihovi primeri mogu se pronaći u svim drevnim civilizacijama. Drevne Inke su koristile čvorove kao pismo. Naime, oni su formirali tekstove vezivanjem čvorova u različitom rasporedu na konopcu ili štapu. Jedna od najlepših legendi Grčke mitologije vezana je baš za čvorove i govori o Gordijevom čvoru, koji je nemoguće razvezati. U staroj Grčkoj se čvorovi mogu sresti i u mozaicima, juvelirstvu, medicini, itd. Pretpostavlja se da se keltska umetnost čvorova, koja je korišćena u religiozne i dekorativne svrhe, javlja još u desetom ili jedanaestom veku sa pojavom istočnjačkih mozaika. Keltski monasi su čitave stranice knjiga iscrtavali komplikovanim keltskim čvorovima.



Slika 1. Čvorovi iscrtani u keltskoj knjizi staroj 1200 godina

Čvorovi imaju veoma veliku ulogu u moreplovstvu i svaki mornar prepoznaje i ume da barata sa nekoliko desetina čvorova. Ti raznovrsni čvorovi služe za osiguravanje, učvršćivanje i fiksiranje, te se slobodno može tvrditi da od umeća vezivanja i rasplitanja konopaca zavisi opstanak broda i ljudi na njemu. Čvorovi su se u moreplovstvu ranije koristili i za merenje brzine kretanja broda. U hirurgiji su se rane vekovima zašivale korišćenjem čvorića na krajevima šavova i značajan je bio način na koji se to radi. Naime, najbolji čvorovi su omogućavali brže zaceljivanje rana.

Matematičku teoriju čvorova prvi put razvija 1771. godine Alexandre-Théophile Vandermonde koji je eksplicitno ukazao na značaj topoloških karakteristika kada se

raspravlja o svojstvima čvorova koji se odnose na geometriju pozicije. Matematičke studije o čvorovima počinju u 19. veku sa Gaussom, koji je definisao krivolinijski integral. Peter Guthrie Tait je 1885. godine objavio tabelu čvorova sa do deset prelaza. U kasnim sedamdesetim godinama dvadesetog veka, William Thurston hiperboličkim teoremama uvodi hiperboličku geometriju u studiju čvorova. Za mnoge čvorove se pokazalo da su hiperbolički čvorovi, što je omogućilo korišćenje geometrije u definisanju invarijanti čvorova. U poslednjih nekoliko decenija 20. veka, naučnici su se zainteresovali za proučavanje fizičkih čvorova kako bi razumeli čvornovate pojave u DNK, kao i slične pojave kod drugih polimera. Svoj doprinos teoriji čvorova dali su i autori S. Jablan, Lj. Radović, A. Zeković (pogledati [1], [7], [8], [9]).

## 2. DEFINICIJA I EKVIVALENCIJA ČVOROVA

Formalni matematički opis konačnog čvora je dat sledećom definicijom:

**Definicija 1.** Čvor predstavlja glatko utapanje kruga  $S^1$  u trodimenzionalni Euklidski prostor  $R^3$  (ili trodimenzionalnu sferu  $S^3$ ), dok je  $c$ -komponentni link glatko utapanje  $c$  disjunktih krugova  $S^1$  u  $R^3$  (ili  $S^3$ ), gde slike krugova  $S_i^1$  predstavljaju njegove komponente ( $i = 2, 3, \dots, c$ ).

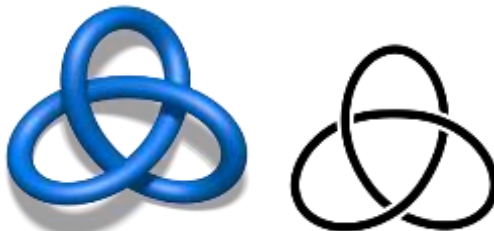
Možemo reći da je čvor injektivna i neprekidna funkcija  $K: [0,1] \rightarrow R^3$  takva da je  $K(0) = K(1)$ . Neformalno, svaki čvor možemo zamisliti kao proizvoljno upetljani kanap. Osnovna razlika između matematičkog čvora i čvorova koje koristimo u svakodnevnoj praksi je ta što su u matematičkom čvoru krajevi spojeni. U matematičkom čvoru debljina njegovih niti je apstrahovana i možemo smatrati da niti nemaju debljinu, kao i da su potpuno elastične, tj. da se bilo koja nit može proizvoljno produžiti, skratiti ili deformisati. Čvor predstavlja zatvorenu krivu u prostoru bez samopreseka. Linkove (višekomponentne čvorove), možemo posmatrati kao skup jednog ili više čvorova koji međusobno mogu biti prepleteni. Očigledno je da čvorovi predstavljaju specijalan slučaj linkova (jednokomponentni linkovi). Čvor koji nema nijedan presek smatra se trivijalnim čvorom i zvaćemo ga nečvor. Bez obzira na to što čvorovi predstavljaju krive u prostoru bez samopreseka, u teoriji čvorova korišćemo izraz "presek". Naime, svaka projekcija nekog čvora (linka) na ravan predstavlja četvorovalentni graf čija temena ćemo nazvati presecima, snabdevena dodatnom informacijom o prostornom odnosu projektovanih niti "iznad-ispod".

Jedan od glavnih zadataka teorije čvorova je klasifikacija čvorova i linkova.

**Definicija 2.** Dva čvora  $K_1$  i  $K_2$  su *ambijentalno izotropna (ekvivalentna)* ukoliko postoji neprekidna funkcija  $H: R^3 \times [0,1] \rightarrow R^3$  takva da:

- 1)  $h_0 = H((x, y, z), 0)$  je identitet iz  $R^3$  u  $R^3$ ,
- 2) za sve  $t \in [0,1]$ ,  $h_t = H((x, y, z), t)$  je homeomorfizam iz  $R^3$  u  $R^3$ ,

3) ako je  $h_1 = H((x, y, z), 1)$ , onda  $h_1(K_1) = K_2$ .



Slika 2. Čvor trolisnik u prostoru i njegov dijagram

Dakle, dva čvora  $K_1$  i  $K_2$  su ekvivalentna ako postoji neprekidno kretanje (ili deformacija) prostora  $R^3$  koje transformiše  $K_1$  u  $K_2$ . U fizičkom smislu, transformacijom jednog čvora u drugi možemo smatrati proizvoljno premotavanje jednog čvora u drugi bez sečenja ili ponovnog spajanja njegovih niti i bez sažimanja nekog dela čvora u tačku.

Pošto su svaka dva kruga međusobno homeomorfna, homeomorfizam samih čvorova nije dovoljan za njihovu klasifikaciju. Imajući u vidu da svaki čvor predstavlja glatko utapanje kruga  $S^1$  u Euklidski trodimenzionalni prostor  $R^3$ , zapravo ćemo raditi sa homeomorfizmom komplementa čvorova smeštenih u  $R^3$ . Kako je ambijentalna izotopija relacija ekvivalencije, svaki čvor predstavljaće klasu ekvivalencije u odnosu na ovu relaciju, pri čemu svaki pojedinačni čvor može poslužiti kao predstavnik cele klase ekvivalencije. Umesto da radimo sa čvorovima u prostoru, neke od problema sa kojima se suočavamo je dovoljno razmatrati na dvodimenzionalnom modelu, te rad sa čvorovima u tom slučaju možemo svesti na rad sa njihovim dijagramima.

**Definicija 3.** *Senka čvora* je projekcija čvora  $K \subset R^3$  na dvodimenzionalnu ravan, takva da ne postoje tri tačke čvora  $K$  koje odgovaraju jednoj tački ravni, odnosi "iznad-ispod" nisu definisani, niti se ukrštaju poprečno.

Da bismo očuvali potpune informacije o nekom neorijentisanom čvoru u prostoru, pri njegovom projektovanju na ravan potrebno je uvesti binarnu relaciju odnosa niti "iznad-ispod", dok u slučaju orijentisanih čvorova uvodimo i znake preseka. Na projekciji čvora, u svakom preseku nit koja se nalazi u prostoru iznad druge niti biće označena neprekidnom, a druga nit prekinutom linijom. Orijehtacijom čvora smatramo izbor smera kojim se obilazi čvor. Za svaki neorijentisani čvor  $K$  postoje dve različite orijentacije i dva orijentisana čvora  $K'$  i  $K''$ . Prilikom obilaska čvora, ukoliko nit po kojoj se krećemo, u samom preseku prolazi "iznad" druge niti (gde se operacija "iznad" posmatra u odnosu na ravan projekcije), tada taj presek nazivamo O-presekom (od engleske reči overcrossing), a u protivnom U-presekom (od engleske reči undercrossing). Ovi tipovi preseka se mogu odrediti i na projekcijama neorijentisanih čvorova.

Promenom odnosa "iznad-ispod" u svim presecima nekog čvora (linka) ili promenom orijentacije, dobijamo njegovu "levu" i "desnu" formu, odn. sliku u ogledalu. Za čvor  $K$ , njegovu sliku u ogledalu ćemo označavati sa  $!K$ .



Slika 3. Levi i desni čvor trolisnik

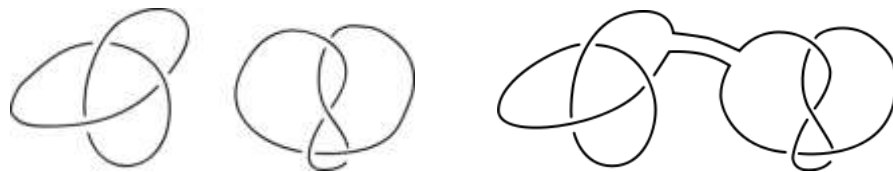
Na projekcijama orijentisanih čvorova presecima se može dodeliti i znak. Svaki presek nekog čvora može u tom slučaju biti pozitivan ili negativan, u zavisnosti od orijentacije tog čvora.

Pozitivne i negativne preseke možemo razmatrati i na neorijentisanim projekcijama. Označimo u nekom preseku nit koja se nalazi iznad i nacrtana je punom linijom sa  $O$ , a nit koja se nalazi ispod i nacrtana je prekinutom linijom sa  $U$ . Posmatrajmo desno orijentisanu rotaciju za  $90^\circ$  koja jedan kraj niti  $O$  prevodi u susedni kraj niti  $U$ . Regione koji se nalaze između takvih krajeva označimo sa  $A$ . Preostala dva regiona označimo sa  $B$ . Presek u kome se javljaju dva horizontalna regiona  $A$  je pozitivni presek i označavamo ga sa  $+1$ , a presek u kome se javljaju dva horizontalna regiona  $B$  je negativni presek i označavamo ga sa  $-1$ .

**Definicija 4.** Projekcija (dijagram) čvora je senka čvora sa dodatnom informacijom o odnosima "iznad-ispod".

**Definicija 5.** Orijetisana projekcija (dijagram) čvora je projekcija čvora sa dodatnom informacijom o orijentaciji krive.

**Definicija 6.** Ako svakom preseku čvora  $K$  promenimo znak (tj. odnos "iznad-ispod"), tada novonastali čvor zovemo *slikom u ogledalu* (eng. mirror-image) čvora  $K$  i obeležavamo je sa  $!K$ .



Slika 4. Direktni proizvod dva čvora

Spajanje (direktni proizvod) dva čvora se dobija tako što svakom čvoru odstranimo deo nekog luka, a zatim spojimo slobodne krajeve novim lukovima (videti sliku 4). Proizvod je nezavisan od mesta spajanja čvorova. Čvor je složen (ili kompozitni) ukoliko se

može prikazati kao spoj netrivialnih čvorova, a u suprotnom je prost. Proizvod čvorova  $K_1$  i  $K_2$  obeležavamo sa  $K_1 \# K_2$ .

### 3. PREPOZNAVANJE ČVOROVA

Veliki problem u teoriji čvorova predstavlja njihovo prepoznavanje, tj. određivanje da li su dva čvora  $K_1$  i  $K_2$  ekvivalentna. Problem transformacija čvora u  $S^3$  može se svesti na transformaciju dijagrama u ravni, korišćenjem Rajdemajsterovih poteza (odmotavanje petlje  $\Omega_1$ , izvlačenje niti koja prolazi iznad ili ispod druge  $\Omega_2$ , pomeranje niti sa jedne strane preseka na drugu  $\Omega_3$ ). Primetimo da odmotavanje petlje smanjuje broj preseka dijagrama za jedan, dok izvlačenje niti smanjuje broj preseka dijagrama za dva.

Dijagram sa minimalnim brojem preseka zvaćemo minimalnim dijagramom. Na prvi pogled izgleda da bismo proizvoljni dijagram čvora  $K$  mogli redukovati na minimalni dijagram samo uzastopnom primenom poteza  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Međutim, problem nije tako jednostavan. U nekim slučajevima je u procesu redukovanja čvora do njegovog minimalnog dijagrama u nekom trenutku potrebno povećati broj preseka, što znači da broj preseka u nizu dijagrama koji prikazuju proces redukcije ne predstavlja uvek strogo opadajući niz. Geric je bio prvi koji je prepoznao čvorove sa navedenom osobinom. Ovde možemo uočiti dva problema: da se redukovanje nekog neminimalnog dijagrama do minimalnog dijagrama ne zasniva uvek na uzastopnom smanjivanju broja preseka i da redosled primene Rajdemajsterovih poteza u procesu minimizacije nije unapred određen, tj. nije jednoznačan.

Postoji algoritam koji su predložili Haken i Hemion, koji garantuje minimizaciju dijagrama i prepoznavanje nečvora, ali je previše kompleksan. Gornja granica broja Rajdemajsterovih poteza neophodnih za redukovanje dijagrama sa  $n$  preseka koji predstavlja nečvor do njegovog minimalnog dijagrama, kruga, iznosi  $2^{cn}$ , gde je  $c = 10^{11}$ .

Minimizacijom ćemo smatrati postupak redukovanja dijagrama čvora do njegovog minimalnog dijagrama.

Jedan od najvažnijih pojmova u teoriji čvorova, koji je uveo Konvej, je pojam spleta (eng. tangle).

**Definicija 7.** Jednodimenzionalna mnogostrukost smeštena u trodimenzionalni disk se naziva *splet* ako se sastoji od dva luka i proizvoljnog broja krugova.

Termin "splet" ćemo koristiti i u slučaju projekcije prostornog spleta u dvodimenzionalni disk.

Čvorovi mutanti nastaju kada se na neki od spletova koji pripadaju nekom čvoru primeni odgovarajuća operacija refleksije ili rotacije. Mutacije su nezahvalna pojava, jer

dva čvora mutanta imaju veliki broj istih invarijanata, između ostalog sve standardne polinomske invarijante, pa ih je veoma teško razlikovati.

Standardni metod za prepoznavanje čvorova je polinomsko prepoznavanje. Polinomi koji se najčešće koriste su Konvejev, Džonsov, HOMFLYPT, Kaufmanov polinom sa dve promenljive i obojeni Džonsov polinom. Svi navedeni polinomi imaju isto svojstvo: dva čvora  $K_1$  i  $K_2$  su različita ukoliko im odgovaraju različiti polinomi. Međutim, ukoliko su za neke čvorove polinomi jednaki, to ne znači da su ti čvorovi međusobno ekvivalentni. Čvorove mutante nijedan pomenuti polinom ne može da razlikuje.

#### 4. GORDIJEV BROJ

Gordijev broj je invarijanta koja određuje broj odvezivosti čvorova. O težini izračunavanja ove invarijante najbolje svedoči sam naziv. U grčkoj mitologiji postoji legenda koja se vezuje za Aleksandra Makedonskog i simbolizuje nerešivi problem predstavljen Gordijevim čvorom koji je nemoguće razvezati. Ovaj problem razrešava Aleksandar Makedonski tako što Gordijev čvor preseca mačem.

Pre samog upoznavanja sa procesom odvezivanja, potrebno je naglasiti da ovaj postupak ne treba poistovećivati sa redukovanjem dijagrama čvora do nečvora. Naime, u procesu redukovanja dijagrama formira se niz ekvivalentnih čvorova, predstavljenih različitim dijagramima, dok prilikom izračunavanja broja odvezivosti, transformacije koje se koriste su promene preseka dijagrama i svaka promena preseka daje neki novi čvor.

Za izračunavanje broja odvezivosti koristićemo operaciju promene preseka. U tom procesu neophodno je preseći jednu od niti preseka, a zatim je ponovo spojiti, menjajući presek iz  $O$  u  $U$  ili obrnuto. Promene preseka su odvezujuće operacije, tj. svaki čvor možemo svesti na nečvor konačnim brojem promena preseka. Lako se dokazuje da se svaki dijagram sa  $n$  preseka svodi na nečvor pomoću najviše  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  promena preseka, gde oznaka  $\lfloor \rfloor$  predstavlja ceo deo broja.

Topoizomeraze su enzimi koji učestvuju u promenama lanaca DNK. Topoizomeraza I raskida jednu nit dvostrukog lanca DNK, dopuštajući da druga nit prođe kroz novonastali prolaz, a zatim ponovo povezuje početnu nit. Topoizomeraza II omogućava sličan proces, ali raskidanjem obe niti u lancu. Na ovaj način topoizomeraze vrše promene preseka u lancima DNK istovetne sa upravo definisanim promenama preseka u čvorovima, te se teorija čvorova može iskoristiti za izučavanje akcija topoizomeraza. Topoizomeraze su odgovorne za sprečavanje formiranja supernamotaja lanaca DNK, za kondenzaciju hromozoma, prekidanje lanaca prilikom genetske rekombinacije, za razmršavanje isprepletenih lanaca nastalih u procesu mitoze i razne druge procese.

### Definicija 8.

- 1) Broj odvezivosti  $u(D)$  dijagrama čvora  $D$  predstavlja minimalni broj promena preseka na dijagramu neophodnih da se dobije dijagram nečvora;
- 2)  $u_m(K)$  čvora  $K$  u  $R^3$  je najmanji  $u(D_m)$  uzet preko svih dijagrama sa minimalnim brojem preseka  $D_m$  koji predstavljaju čvor  $K$ ;
- 3) Broj odvezivosti  $u(D)$  čvora  $K$  u  $R^3$  je najmanji  $u(D)$  uzet preko svih dijagrama  $D$  koji predstavljaju čvor  $K$ .

## 5. GORDIJEVO RASTOJANJE

**Definicija 9.** Gordijevo rastojanje (*distanca ili udaljenost*) dva čvora  $K_1$  i  $K_2$  predstavlja minimalan broj promena preseka potreban za konvertovanje čvora  $K_1$  u  $K_2$ . Rastojanje čvorova  $K_1$  i  $K_2$  obeležava se sa  $d(K_1, K_2)$ .

Jedna od primena izračunavanja rastojanja čvorova je proučavanje transformacija koje se vrše u lancima DNK. Kako su topoizomeraze enzimi koji učestvuju u promenama preseka u lancima DNK, udaljenost dva čvora predstavlja minimalni broj dejstava topoizomeraze na DNK u cilju prelaska jednog lanca (čvora) u drugi.

Rastojanja čvorova imaju svojstvo metrike:

- 1)  $d(K_1, K_2) = 0$  ako i samo ako je  $K_1 = K_2$ ;
- 2)  $d(K_1, K_2) = d(K_2, K_1)$ ;
- 3)  $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, K) + d(K, K_2)$ , gde je  $K$  proizvoljni čvor.

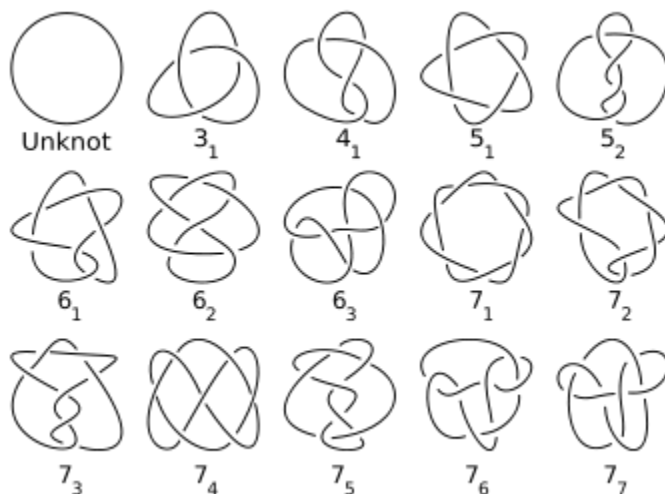
Specijalno, važi nejednakost  $d(K_1, K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$ , gde je  $u(K)$  broj odvezivosti čvora  $K$ . Ova osobina je od velikog značaja za određivanje rastojanja dva čvora i može se koristiti kao gornja granica rastojanja.

Specijalan slučaj predstavlja rastojanje nekog čvora od nečvora i tada je ono jednako broju odvezivosti, tj.  $u(K) = d(K, 0_1)$ , gde je  $0_1$  oznaka za nečvor. Primitimo da za izračunavanje broja odvezivosti  $u(K)$  minimum mora biti uzet preko svih dijagrama  $D$  čvora  $K$ . U nekim slučajevima, kada u procesu konvertovanja  $K_1$  do  $K_2$  prolazimo kroz nečvor (pa je  $d(K_1, K_2) = u(K_1) + u(K_2)$ ), prema Bernhard-Jablanovoj hipotezi postoji mogućnost da  $u(K_1)$  i  $u(K_2)$  izračunamo rekursivnim procesom iz minimalnih dijagrama. Nažalost, rastojanja čvorova najčešće se realizuju na neminimalnim dijagramima i ne vode preko nečvora, tj. ne zahtevaju kompletno odvezivanje čvora  $K_1$  i dobijanje čvora  $K_2$  iz nečvora pomoću niza promena preseka. Naime, za rastojanja čvorova važi nejednakost trougla  $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, 0_1) + d(0_1, K_2) = u(K_1) + u(K_2)$ , ali je gotovo uvek zadovoljena stroga nejednakost  $d(K_1, K_2) < u(K_1) + u(K_2)$ .

## 6. KLASIČNA NOTACIJA ČVOROVA

Aleksander i Brigs su 1927. godine uveli notaciju čvorova koja je poznata kao klasična notacija. Tablice čvorova koje koriste klasičnu notaciju, praćene dijagramima čvorova, moguće je naći na kraju skoro svake od knjiga iz oblasti teorije čvorova. Rolfsen je 1976. godine objavio knjigu koja sadrži tablice čvorova i pored klasične notacije, upotrebljava i Konvejevu notaciju. Pored čvorova sa  $n \leq 10$  preseka, Rolfsenove tablice sadrže i linkove sa  $n \leq 9$  preseka, gde  $n_i^j$  predstavlja  $i$ -ti čvor ili link sa  $n$  preseka i  $j$  komponenta. Za čvorove se indeks  $j$  izostavlja.

Klasična notacija klasifikuje čvorove po broju preseka. Da bi se čvorovi imenovali, neophodno je prvo napraviti bazu (tablice) čvorova. U svojim tablicama Rolfsen navodi čvorove sa do deset preseka, pa se ove tablice mogu prihvatiti kao standard. navedenih čvorova, postoji 21 čvor sa osam preseka, 49 čvorova sa devet preseka i 165 čvorova sa deset preseka. Perko je pronašao duplikat u ovim tablicama – čvorove  $10_{161}$  i  $10_{162}$ , pa ova dva čvora nose naziv "Perkov par".



Slika 5. Dijagrami čvorovi sa  $n \leq 7$  preseka

Prve tablice čvorova do  $n \leq 11$  preseka izveli su Tejt, Kirkman i Little krajem XIX veka. Nakon bezuspešnih pokušaja Listinga da konstruiše invarijantu čvorova zasnovanu na dijagramima i njihovim regionima, prva polinomska invarijanta, Aleksanderov polinom, korišćena je u knjizi Rajdemajstera "Knoten theorie" za razlikovanje čvorova. Na kraju ove knjige nalaze se tablice čvorova sa do devet preseka. U knjigama koje sadrže tablice čvorova, oni su najčešće praćeni i polinomalnim invarijantama koje ih razlikuju. Tako, u Rolfsenovoj knjizi uz čvorove i linkove i njihove dijagrame su navedeni Aleksanderovi polinomi, u knjizi Kauffmana navedeni su L-



polinomi, itd. Tabelacija čvorova sa  $n > 11$  preseka postala je moguća tek nakon pojave računara.

Za čvorove do šesnaest preseka koristi se KnotScape notacija. Ova notacija nosi naziv po programu koji je poslužio za izvođenje ovih čvorova i koji sadrži bazu čvorova i linkova do šesnaest preseka.

Za upotrebu klasične notacije neophodno je prisustvo baze čvorova. Na osnovu same oznake nije moguće nacrtati čvor, tj. nije moguće znati o kom se čvoru radi. Čvor, koji je dat u klasičnoj notaciji, neophodno je identifikovati u bazi na osnovu oznake. Kako je u bazi, tj. tablicama, prisutna i slika samog čvora, tek nakon pretrage tablica možemo znati kako čvor zaista izgleda. Zapravo, svi dijagrami čvorova sa do devet preseka i kod Rolfsena i kod svih ostalih autora, koji ih navode, kopirani su iz Rajdemajsterove knjige. Tragajući za nekim obrascem koji eventualno postoji u formiranju tablica čvorova, možemo jedino uočiti da su na početku svih tablica navedeni racionalni čvorovi. Nakon racionalnih čvorova, nemoguće je uočiti bilo kakav obrazac u formiranju tablica koji ukazuje na klasifikaciju čvorova. Iako klasična notacija ne pruža nikakvu algebarsku informaciju o samom čvoru ili linku, osim broja preseka i broja komponenta, to je notacija koja se najčešće koristi.

## 7. CRTANJE ČVOROVA KORIŠĆENJEM PAKETA MATHEMATICA

Programski paket Wolfram Mathematica 10.2 se može koristiti za crtanje čvorova. Za primenu programskog paketa Mathematica u teoriji geometrije krivih i površi interesantno je proučiti knjigu [6]. Da bismo čvor prikazali u trodimenzionalnom prostoru, korišćemo funkciju Graphics3D. Funkcija KnotData nam omogućava crtanje čvorova na osnovu klasične notacije, dok nam opcija ImageData omogućava pozicioniranje čvora tako da preseki budu najpreglednije prikazani.

Mathematica ima definisanu opciju KnotData["Trefoil"] za crtanje čvora trolisnika (eng. trefoil) koji ima tri preseka, ali je dati čvor moguće nacrtati i zadavanjem komande:

```
Graphics3D[{Orange, Specularity[White, 70], KnotData[{3,1}, "ImageData"]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 6. Čvor  $3_1$

Postoji samo jedan matematički čvor sa četiri preseka, koji dobijamo zadavanjem komande:

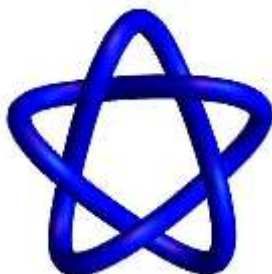
```
Graphics3D[{{Pink, Specularity[White, 70], KnotData[{4,1}, ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 7. Čvor  $4_1$

Razlikujemo dva čvora sa po pet preseka. Njih dobijamo zadavanjem odgovarajućih komandi:

```
Graphics3D[{{Blue, Specularity[White, 70], KnotData[{5,1}, ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 8. Čvor  $5_1$

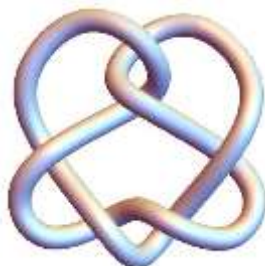
```
Graphics3D[{{Orange, Specularity[White, 70], KnotData[{5,2}, ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 9. Čvor  $5_2$

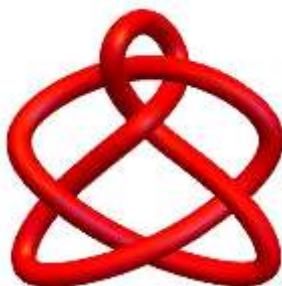
Razlikujemo tri neekvivalentna matematička čvora sa po šest preseka. Za njihovo iscrtavanje Mathematici dajemo sledeće naredbe:

```
Graphics3D[{LightBlue, Specularity[White, 70], KnotData[{6,1},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 10. Čvor 6<sub>1</sub>

```
Graphics3D[{Red, Specularity[White, 70], KnotData[{6,2},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 11. Čvor 6<sub>2</sub>

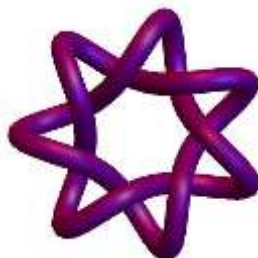
```
Graphics3D[{Green, Specularity[White, 70], KnotData[{6,3},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 12. Čvor 6<sub>3</sub>

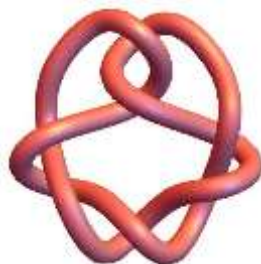
Postoji sedam različitih matematičkih čvorova, za čije iscrtavanje Mathematici zadajemo sledeće komande:

```
Graphics3D[{Purple, Specularity[White, 70], KnotData[{7,1},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 13. Čvor 7<sub>1</sub>

```
Graphics3D[{Pink, Specularity[White, 70], KnotData[{7,2},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



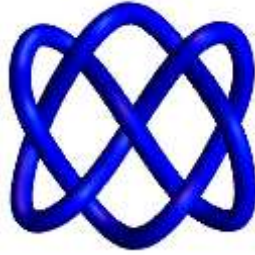
Slika 14. Čvor 7<sub>2</sub>

```
Graphics3D[{Orange, Specularity[White, 70], KnotData[{7,3},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



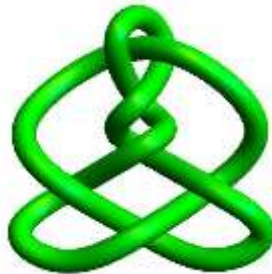
Slika 15. Čvor 7<sub>3</sub>

```
Graphics3D[{Blue, Specularity[White, 70], KnotData[{7,4},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



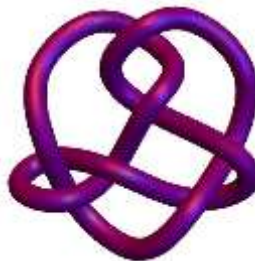
Slika 16. Čvor  $7_4$

```
Graphics3D[{Green, Specularity[White, 70], KnotData[{7,5},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 17. Čvor  $7_5$

```
Graphics3D[{Purple, Specularity[White, 70], KnotData[{7,6},ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 18. Čvor  $7_6$

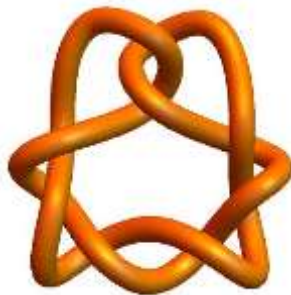
```
Graphics3D[{LightBlue, Specularity[White, 70], KnotData[{7,7}, "ImageData"]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 19. Čvor  $7_7$

Korišćenjem programskog paketa Wolfram Mathematica 10.2 moguće je nacrtati još i čvorove koji imaju po osam preseka. U navedenom programskom paketu, pomoću funkcije KnotData i klasične notacije čvorova, nije moguće crtanje čvorova koji imaju devet ili više preseka. Kako postoji ukupno 21 neekvivalentan čvor sa osam preseka, u ovom radu ćemo navesti kako se u Mathematici crtaju samo neki od njih.

```
Graphics3D[{Orange, Specularity[White, 70], KnotData[{8,1}, ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



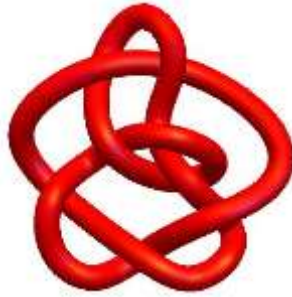
Slika 20. Čvor  $8_1$

```
Graphics3D[{Green, Specularity[White, 70], KnotData[{8,5}, ImageData]}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



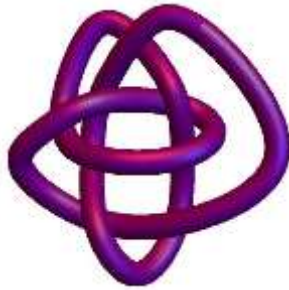
Slika 21. Čvor  $8_5$

```
Graphics3D[{{Red, Specularity[White, 70], KnotData[{{8,10},ImageData]}}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 22. Čvor  $8_{10}$

```
Graphics3D[{{Purple, Specularity[White, 70], KnotData[{{8,21},ImageData]}}, Boxed  
→ False, ViewPoint → {0,0.1,5}]
```



Slika 23. Čvor  $8_{21}$

## 8. LITERATURA

- [1] A.Z. Zeković, *Konvejeva notacija u teoriji čvorova i njena primena u metodima za određivanje rastojanja čvorova*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd, 2015.
- [2] V.O. Manturov, *Knot Theory*, Chapman & Hall/CRC, CRC Press LLC, 2004.
- [3] R.H. Crowell, R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [4] G. De Santi, *An Introduction to the Theory of Knots*, 2002.
- [5] K. Murasugi, *KNOT THEORY and ITS APPLICATIONS*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

- [6] Lj. Velimirović, P. Stanimirović, M. Zlatanović, *Geometrija krivih i površi uz korišćenje paketa Mathematica*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2010.
- [7] S. Jablan, R. Sazdanović, *Braid family representatives*, arXiv:math.GT/0504479v1, 2005.
- [8] Lj. Radović, S. Jablan, *Mirror-curve codes for Knots and Links*, Publications de L'Institut Mathematique Nouvelle serie, tome 94 (108) (2013), 181-186.
- [9] A. Zeković, S. Jablan, *Smoothing Distances of Knots*, IEEE, 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, September 26-28 (2013), 33–38.